

Analyse de la qualité de modèles nodaux réduits à l'aide de la méthode des quadripôles

Patrick Lagonotte*, Yves Bertin, Jean-Bernard Saulnier

Laboratoire d'études thermiques (LET), UMR CNRS 6608, ENSMA, BP 109, 86960 Futuroscope cedex, France

(Reçu le 12 mars 1998, accepté le 15 mai 1998)

Abridged English version at the end of the text

Abstract—Qualitative analysis of reduced nodal models using the two-port (transfer function) method. A comparative study between models with transfer function (two-port) and nodal models is carried out in a Laplace space and in a time domain. We particularly bring to the fore the physical content of the transfer matrix. Different examples of finite walls let us identify the main use of each of these matrix terms, according to the chosen boundary conditions. The defaults of small order models, in the first instant, are characterised either in Laplace and in time domain. Perspectives of this confrontation in model reduction research are evoked. © Elsevier, Paris

modelling / simulation / conduction / nodal method / two-port method / transfer function / model reduction

Résumé — Une étude comparative de modèles à fonctions de transfert (quadripôles) et de modèles nodaux est menée dans l'espace de Laplace et dans le domaine temporel. On met l'accent en particulier sur le contenu physique de la matrice de transfert. Des exemples simples de type mur fini permettent d'identifier le rôle majeur de chacun des termes de cette matrice, selon les conditions aux limites retenues. Les défauts des modèles d'ordre faible, aux premiers instants, sont caractérisés tant dans l'espace de Laplace que dans le domaine temporel. Des perspectives de cette confrontation sont évoquées en matière de réduction de modèles. © Elsevier, Paris

modélisation / simulation / conduction / méthode nodale / méthode des quadripôles / fonctions de transfert / réduction de modèles

Nomenclature

a	diffusivité thermique	$m^2 \cdot s^{-1}$
$A(p)$	transmittance en température	
$B(p)$	transmittance en impédance	$K \cdot W^{-1}$
c	chaleur massique	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
C	capacité thermique	$J \cdot K^{-1}$
$C(p)$	transmittance en admittance	$W \cdot K^{-1}$
$D(p)$	transmittance en flux	
l	épaisseur	m
N	nombre de cellules	
p	variable de Laplace	s^{-1}
R	résistance thermique	$K \cdot W^{-1}$
S	section	m^2
T	température (temporel)	K
t	temps	s

z	abscisse	m
-----	----------------	---

Symboles grecs

λ	conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
ρ	masse volumique	$kg \cdot m^{-3}$
φ	flux thermique (temporel)	W
Φ	flux thermique (Laplace)	J
θ	température (Laplace)	K·s

Indices

e	entrée
s	sortie

1. INTRODUCTION

Cet article vise à établir un lien particulier entre la méthode nodale et l'approche par quadripôles. Utilisée depuis longtemps maintenant en thermique

* Correspondance et tirés à part.
 let@ensma.fr



[1], la méthode nodale a fait largement ses preuves à l'égard de très nombreuses applications industrielles [2] : spatial, électronique, électrotechnique, moteurs automobiles, milieux semi-transparents sont autant de secteurs justifiables d'une approche par la méthode nodale. Certes, elle possède ses limites, et l'on citera par exemple son inaptitude à permettre une analyse poussée des transferts au sein du fluide [2]. Elle a cependant permis des approches efficaces en méthodes inverses [3] et s'avère un cadre bien propice aux techniques de réduction des modèles [4, 5].

L'approche par quadripôles [6] est également bien implantée en thermique. Bien adaptée aux multicouches, elle a été étendue par exemple aux milieux poreux et à la caractérisation thermique des sols [7, 8], voire au comportement de milieux semi-transparents [6].

Il était a priori intéressant de tenter une démarche comparative de ces deux approches, et c'est là l'objet de cet article. Nous résumons le mode d'obtention d'un quadripôle à l'égard d'un mur fini en dégagant quelques caractéristiques du contenu et de l'apport de la matrice de transfert. La comparaison portera sur des exercices simples de mur fini dont une face (dite avant) est soumise à un échelon de flux ou de température, l'autre face (arrière) étant soit adiabatique, soit maintenue à une température de référence. Elle opérera dans l'espace de Laplace, où l'on comparera les développements exacts des fonctions de la matrice de transfert aux fonctions polynomiales, d'ordre fini, obtenues avec les modèles nodaux correspondants. La comparaison s'achèvera enfin à travers l'examen de la réponse temporelle des modèles nodaux simulés.

2. RAPPEL SUR LA REPRÉSENTATION D'UN MUR FINI SOUS LA FORME D'UN QUADRIPOLE

Nous allons utiliser la représentation d'un mur fini sous la forme d'un quadripôle «thermique». Celui-ci nous fournira la solution de l'équation de la chaleur dans l'espace de Laplace : cette solution, de nature analytique, présente dans cet espace un caractère exact et nous servira de référence.

Résolution de l'équation de la chaleur dans un mur d'épaisseur l

La figure 1 schématise la configuration d'un mur fini passif de section S , d'épaisseur l et de diffusivité a .

On note T_e et T_s , φ_e et φ_s les températures et flux aux sections d'abscisse $z = 0$ et $z = l$. L'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

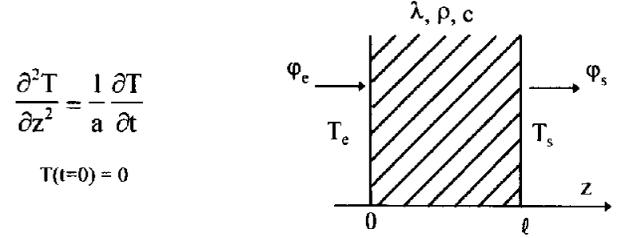


Figure 1. Caractéristiques thermiques d'un mur fini d'épaisseur l .

Figure 1. Thermal characteristics of a wall finite of thickness l .

s'écrit, après transformation de Laplace :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{p \theta}{a} = 0 \quad (2)$$

Les transformées en température θ et en flux Φ , ont pour expressions respectives :

$$\theta(z) = \alpha \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} z \right) + \beta \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} z \right) \quad (3)$$

$$\Phi(z) = -\lambda S \left[\alpha \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} z \right) + \beta \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} z \right) \right] \quad (4)$$

L'identification de $\theta(0) = \theta_e$ et $\Phi(0) = \Phi_e$ conduit à :

$$\alpha = \theta_e \quad (5)$$

$$\beta = -\frac{\Phi_e}{\lambda S \sqrt{\frac{p}{a}}} \quad (6)$$

D'où la relation de type entrée-sortie entre les fonctions θ_e , Φ_e et θ_s , Φ_s , ces deux dernières correspondant à θ et à Φ sur le plan $z = l$:

$$\begin{pmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) & -\frac{1}{\lambda S \sqrt{\frac{p}{a}}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \\ -\lambda S \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) & \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{pmatrix} \quad (7)$$

En posant $R = \frac{l}{\lambda S}$ (résistance thermique associée au mur en régime stationnaire), $C = \rho c l S$ (capacité thermique du mur), il vient :

$$\begin{pmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \sqrt{pRC} & -\frac{R}{\sqrt{pRC}} \operatorname{sh} \sqrt{pRC} \\ -\frac{\sqrt{pRC}}{R} \operatorname{sh} \sqrt{pRC} & \operatorname{ch} \sqrt{pRC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{pmatrix} \quad (8)$$

Pour des questions de commodité de calcul nous écrirons (8) selon :

$$\begin{pmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\sqrt{pRC} & \frac{R}{\sqrt{pRC}} \text{sh}\sqrt{pRC} \\ \frac{\sqrt{pRC}}{R} \text{sh}\sqrt{pRC} & \text{ch}\sqrt{pRC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{pmatrix} \quad (9)$$

Cette dernière formulation permet de voir le mur comme un quadripôle (figure 2), dont on identifie aisément la matrice de transfert [T] à partir de l'équation (9).

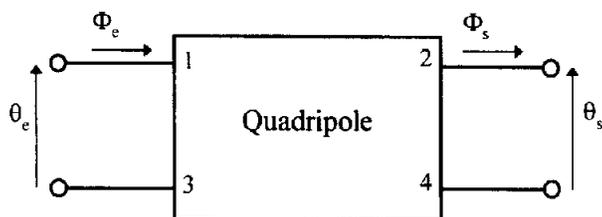


Figure 2. Quadripôle thermique associé au mur.
Figure 2. Thermal two-port associated to the wall.

Cette matrice de transfert [T] présente un caractère intrinsèque à l'objet «mur», indépendamment de ses relations avec l'environnement extérieur. En présence d'une situation définie par les conditions aux limites particulières (traduisant des relations entre le mur et son environnement), les grandeurs θ et Φ attachées à une même face ne sont pas indépendantes, car liées par des termes de la matrice de transfert (cf. § 4.1.). Du point de vue des excitations, on vérifie ici naturellement que l'on ne peut pas simultanément imposer sur une même face un flux de chaleur et une température.

3. LA MODÉLISATION D'UN MUR FINI PAR LA MÉTHODE NODALE

3.1. Modélisation d'une cellule élémentaire

Le volume initial d'épaisseur l est décomposé en N cellules élémentaires. Au centre de chaque cellule élémentaire correspond un nœud du réseau équivalent, (figure 3).

L'application des conditions aux limites au modèle du mur nécessite de préciser la configuration des nœuds au voisinage des faces extrêmes. Nous pouvons distinguer deux variantes, l'une à base de cellules en « Π » décrivant des modèles «sans» nœud de surface, et l'autre, à base de cellules en «T», introduisant des nœuds de surface. L'ordre se réfère au nombre de cellules composant le modèle.

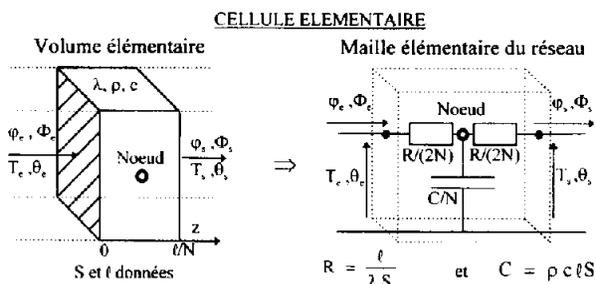


Figure 3. Cellule élémentaire et quadripôle en «T» associés à un volume de mur d'épaisseur l/N .
Figure 3. Elementary cell and T-shaped two-port associated to a wall volume of thickness l/N .

3.2. Modélisation avec ajout de nœuds de surface (cellules en «T»)

Cette première variante consiste à discrétiser régulièrement le volume, puis à ajouter un nœud dénué de capacité sur chaque face extrême (figure 4). Ces nœuds ajoutés sont appelés «nœuds de surface».

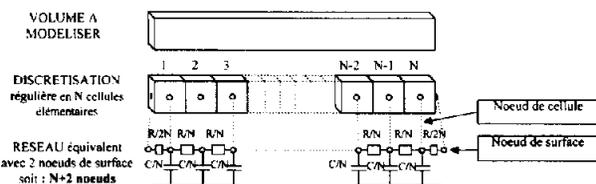


Figure 4. Modélisation avec nœuds de surface.
Figure 4. Modelling with surface boundary nodes.

Nous pouvons remarquer que toutes les capacités ont la même valeur. Par contre, les conductances extrêmes sont différentes. Dans ce cas, une discrétisation en N cellules crée un réseau à $N + 2$ nœuds. Le système différentiel associé comporte N équations différentielles et 2 équations algébriques. Les conditions limites concernent l'état des nœuds de surface (températures imposées, flux imposés, conditions mixtes) et n'altèrent aucunement la structure du système différentiel. Un exemple de réseaux équivalents modélisant le même mur (cas 1 cellule et 4 cellules) est présenté sur la figure 5 ; les différences de comportement en fonction du nombre de cellules seront étudiées au § 5.

3.3. Modélisation sans ajout de nœuds de surface (cellules en « Π »)

La seconde variante consiste également à discrétiser régulièrement le volume, mais à commencer et à terminer la discrétisation par des demi-cellules dont

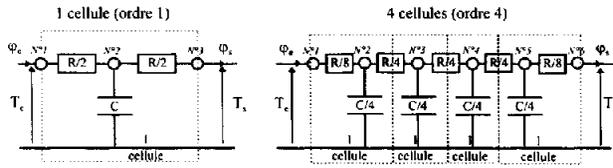


Figure 5. Modèles d'ordre 1 et 4 avec nœuds de surface (cellules en T).

Figure 5. First and fourth order models with surface boundary nodes (T-shaped cells).

les nœuds, dotés d'une capacité, joueront le rôle de nœuds de surface (figure 6).

Nous pouvons remarquer que toutes les conductances ont la même valeur. Par contre, les capacités des éléments extrêmes ont des valeurs différentes. Une discrétisation en \$N\$ cellules crée un réseau à \$N + 1\$ nœuds. Un exemple de réseaux équivalents modélisant le même mur (cas 1 cellule et 4 cellules) est présenté sur la figure 7 ; les différences de comportement en fonction du nombre de cellules seront étudié au § 5.

Excepté les nœuds extrêmes, les nœuds des deux modélisations (en T, figure 4, et en II, figure 6) ne sont pas superposables, puisque décalés d'une demi-cellule. Notons qu'une condition en température pariétale imposée est ici de nature à modifier le système différentiel initial (l'ordre diminue alors d'une unité, cf. § 5.2.3.).

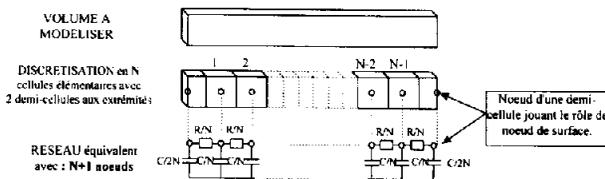


Figure 6. Modélisation sans nœud de surface.

Figure 6. Modelling without surface boundary nodes.

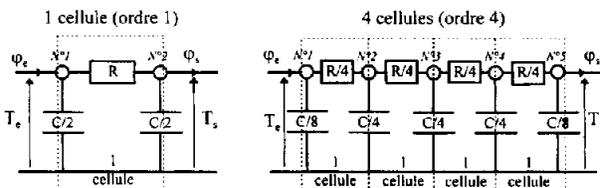


Figure 7. Modèles d'ordre 1 et 4 sans nœud de surface (cellules en II).

Figure 7. First and fourth order models without surface boundary nodes (II-shaped cells).

4. LA MATRICE DE TRANSFERT : SON CONTENU ET SON APPORT

Reprenons la formulation de l'équation de la chaleur sous forme de quadripôle établie précédemment (cf. équation (9)), et posons :

$$T(p) = \begin{vmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{vmatrix}$$

$$A(p) = D(p) = \text{ch}\sqrt{pRC}$$

$$B(p) = \frac{R}{\sqrt{pRC}} \text{sh}\sqrt{pRC} \quad (10)$$

avec

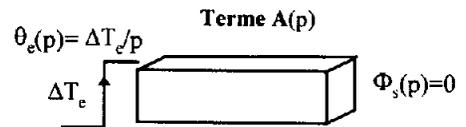
$$C(p) = \frac{\sqrt{pRC}}{R} \text{sh}\sqrt{pRC}$$

4.1. Interprétation physique des termes \$A(p)\$, \$B(p)\$, \$C(p)\$ et \$D(p)\$ de la matrice de transfert

La matrice \$[T]\$ correspond au comportement d'un système linéaire que nous pourrions considérer comme soumis à de petites variations ou à des variations relatives. Chaque terme de la matrice peut être mis en relation avec des conditions limites différentes, appliquées au mur (attaque en flux ou en température en entrée, sortie adiabatique ou à température imposée) (figures 8 et 9) :

- le terme \$A(p)\$ de la matrice correspond à la fonction de transfert en température \$\theta_e(p)/\theta_s(p)\$ dans

SORTIE ADIABATIQUE

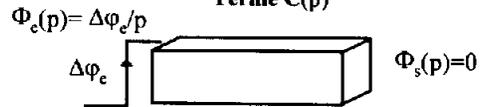


Impédance d'entrée : \$\theta_e(p)/\Phi_e(p) = Z_e(p) = A(p)/C(p)\$

F. de transfert en température : \$\theta_s(p)/\theta_e(p) = 1/A(p)\$

F. de transfert en admittance : \$\Phi_s(p)/\theta_e(p) = 0\$

Terme C(p)



Impédance de sortie : \$\theta_s(p)/\Phi_s(p) = Z_s(p) = \infty\$

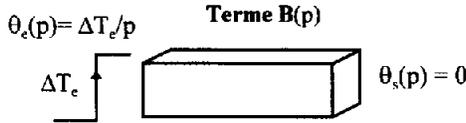
F. de transfert en flux : \$\Phi_s(p)/\Phi_e(p) = 0\$

F. de transfert en impédance : \$\theta_s(p)/\Phi_e(p) = 1/C(p)\$

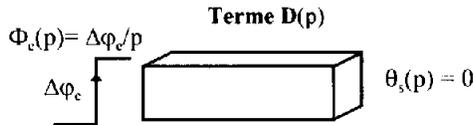
Figure 8. Différentes fonctions de transfert de la matrice du système, selon les modes d'excitation, pour une sortie adiabatique.

Figure 8. Different transfer functions of the system matrix depending on excitation modes, in case of adiabatic output.

SORTIE À TEMPÉRATURE IMPOSÉE



Impédance d'entrée : $\theta_e(p) / \Phi_e(p) = Z_e(p) = B(p) / D(p)$
 F. de transfert en température : $\theta_s(p) / \theta_e(p) = 0$
 F. de transfert en admittance : $\Phi_s(p) / \theta_e(p) = 1 / B(p)$



Impédance de sortie : $\theta_s(p) / \Phi_s(p) = Z_s(p) = 0$
 F. de transfert en flux : $\Phi_s(p) / \Phi_e(p) = 1 / D(p)$
 F. de transfert en impédance : $\theta_s(p) / \Phi_e(p) = 0$

Figure 9. Différentes fonctions de transfert de la matrice du système selon les modes d'excitation, pour une sortie à température imposée.

Figure 9. Different transfer functions of the system matrix depending on excitation modes, in case of imposed temperature output.

le cas où $\varphi_s = 0$, $\Phi_s(p) = 0$ (conditions aux limites : attaque en température et sortie adiabatique) ;

- le terme **D(p)** de la matrice correspond à la fonction de transfert en flux ($\Phi_s(p) / \Phi_e(p)$) dans le cas où $T_s = 0$, $\theta_s(p) = 0$ (conditions aux limites : attaque en flux et température de sortie imposée) ;

le terme **B(p)** de la matrice correspond à la fonction de transfert en impédance ($\theta_e(p) / \Phi_s(p)$) dans le cas où $T_s = 0$ et $\theta_s(p) = 0$ (conditions aux limites : attaque en température et température de sortie imposée) ;

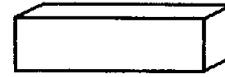
- le terme **C(p)** de la matrice correspond à la fonction de transfert en admittance ($\Phi_e(p) / \theta_s(p)$) dans le cas où $\varphi_s = 0$, $\Phi_s(p) = 0$ (conditions aux limites : attaque en flux et sortie adiabatique).

Observons que les impédances thermiques d'entrée et de sortie dépendent certes des caractéristiques intrinsèques du mur (**A(p)**, **B(p)**, **C(p)** et **D(p)**), mais également de la nature des conditions aux limites.

4.2. Analyse de quelques comportements asymptotiques et exploitation de la matrice de transfert par passage aux limites

Si nous effectuons à partir de l'équation (10) des développements limités autour de $p = 0$ (fréquence nulle ou temps très long), nous obtenons pour un modèle continu les expressions suivantes (11). Pour le

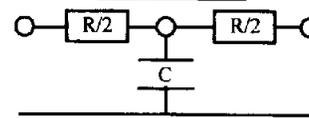
Modèle continu



Solution analytique développée

$$\begin{aligned}
 A(p) = D(p) &= 1 + \frac{pRC}{2!} + \frac{(pRC)^2}{4!} + \frac{(pRC)^3}{6!} + \frac{(pRC)^4}{8!} + \dots \\
 B(p) &= R \left[1 + \frac{pRC}{3!} + \frac{(pRC)^2}{5!} + \frac{(pRC)^3}{7!} + \dots \right] \\
 C(p) &= pC \left[1 + \frac{pRC}{3!} + \frac{(pRC)^2}{5!} + \frac{(pRC)^3}{7!} + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Modèle nodal



Polynômes

$$\begin{aligned}
 A(p) = D(p) &= 1 + \frac{pRC}{2} \\
 B(p) &= R \left[1 + \frac{pRC}{4} \right] \\
 C(p) &= pC
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Figure 10. Développements limités de la solution analytique et polynômes du modèle nodal.

Figure 10. The Taylor series expansion of the analytical solution and the polynoms of the nodal model.

modèle discret, nous obtenons toujours après calcul (voir annexe) des polynômes (12), dont l'ordre correspond en particulier au nombre de cellules pour les termes **A** et **D**. Ces résultats seront repris et discutés au § 5.

Nous appliquerons les développements limités du modèle continu à deux configurations particulières où la face arrière du mur ($z = l$) est soit adiabatique, soit à température imposée. Dans tous les cas la face avant est soumise à un échelon de flux.

4.2.1. Face arrière adiabatique : $\varphi_s = 0$

Effectuons une attaque en flux sur la face d'entrée, la face de sortie étant isolée. Nous pouvons alors déduire les évolutions des températures d'entrée T_e et de sortie T_s en régime asymptotique ($p \rightarrow 0$), à partir des termes de la matrice de transfert **A(p)** et **C(p)**.

Il vient dans ces conditions (cf. figure 8) :

$$\begin{aligned}
 \theta_e(p) &= A(p) \Phi_e(p) / C(p) \approx \Delta \varphi_e / p^2 C \\
 \theta_s(p) &= \Phi_e(p) / C(p) \approx \Delta \varphi_e / p^2 C
 \end{aligned}$$

En régime asymptotique, T_e et T_s sont donc des rampes de température de pente $\Delta\varphi_e/C$.

Considérons maintenant l'écart de température entre l'entrée et la sortie $T_e - T_s$. Partant de: $\theta_e(p) - \theta_s(p) = (\mathbf{A}(p) - 1) \Phi_e(p)/\mathbf{C}(p) \approx (R/2) \Delta\varphi_e/p$, nous observons qu'en régime asymptotique, l'écart de température $T_e - T_s$ est constant et vaut $(R/2) \Delta\varphi_e$. Ceci correspond au schéma de la *figure 11*.

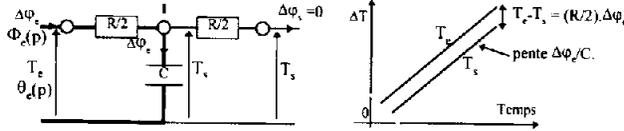


Figure 11. Exploitation de la matrice de transfert par passage aux limites (cas de la sortie adiabatique).

Figure 11. Exploitation of the transfer matrix by extrapolation (case of adiabatic output).

En régime asymptotique, à l'égard de T_s voire de T_e , c'est ici le terme $1/pC$ qui s'avère dominant ; on retrouve ainsi le caractère intégrateur pur du mur. De plus, la différence de température face avant/face arrière met en jeu la résistance $R/2$. Ceci peut s'interpréter à l'aide du schéma nodal sommaire de la *figure 11*, où le caractère isolé de la face arrière conduit à reporter T_s au nœud intermédiaire **I** séparé de la face avant par la résistance $R/2$. Le concept de résistance thermique R , qui caractérise l'analogie avec la loi d'Ohm du régime asymptotique (cf. § 4.2.2.), ne peut pas décrire le transfert dans ce régime dynamique.

4.2.2. Face arrière à température imposée : $T_s = 0$

Pour une attaque en flux sur la face d'entrée, la face de sortie étant à température imposée, les évolutions des températures d'entrée T_e et de sortie T_s se déduisent en régime établi à partir des termes de la matrice de transfert $\mathbf{B}(p)$ et $\mathbf{D}(p)$.

Dans ces conditions :

$$\theta_e(p) = \mathbf{B}(p) \Phi_e(p) / \mathbf{D}(p) \approx R \Delta\varphi_e / p$$

L'écart de température entre l'entrée et la sortie $T_e - T_s$ dans l'espace de Laplace s'écrit :

$$\theta_e(p) - \theta_s(p) = \mathbf{B}(p) \Phi_e(p) / \mathbf{D}(p) \approx R \Delta\varphi_e / p$$

Le retour au domaine temporel montre qu'en régime stationnaire, l'écart de température $T_e - T_s$ est constant et vaut $R \Delta\varphi_e$, et l'on retrouve le comportement classique d'une résistance thermique obtenue en régime stationnaire ; à l'égard de $T_e - T_s$, c'est le terme R qui s'avère ici dominant. Ceci correspond au schéma de la *figure 12*.

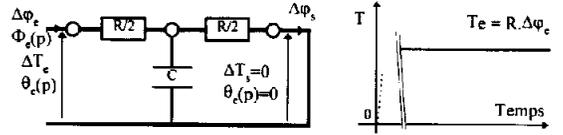


Figure 12. Exploitation de la matrice de transfert par passage aux limites (cas de la sortie à température imposée).

Figure 12. Exploitation of the transfer matrix by extrapolation (case of imposed temperature output).

4.2.3. Comportement aux premiers instants sur la face d'entrée

Effectuons maintenant une attaque en flux sur la face d'entrée, et observons l'évolution de la température sur cette même face. Cette hypothèse des premiers instants signifie en particulier que la chaleur n'a plus le temps d'atteindre la face arrière, et dans ces conditions la nature des conditions aux limites sur la face arrière s'avère sans influence. Nous pouvons alors déduire les évolutions transitoires de la température d'entrée θ_e à partir des termes de la matrice de transfert $\mathbf{A}(p)/\mathbf{C}(p)$ et $\mathbf{B}(p)/\mathbf{D}(p)$. Ceci se confirme à travers l'examen de l'impédance thermique d'entrée $Z_e(p) = \frac{\theta_e(p)}{\Phi_e(p)}$, qui selon les cas s'écrit :

$$Z_e(p) = \frac{\theta_e(p)}{\Phi_e(p)} = \frac{\mathbf{A}(p)}{\mathbf{C}(p)} = \frac{R \coth(\sqrt{pRC})}{\sqrt{pRC}} \quad (12)$$

pour une face arrière isolée :

$$\text{et } Z_e(p) = \frac{\theta_e(p)}{\Phi_e(p)} = \frac{\mathbf{B}(p)}{\mathbf{D}(p)} = \frac{R \operatorname{th}(\sqrt{pRC})}{\sqrt{pRC}} \quad (13)$$

pour une face arrière à température imposée.

Or $\lim_{p \rightarrow +\infty} \coth(\sqrt{pRC}) = 1$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(\sqrt{pRC}) = 1$, et dans les deux cas cette limite est très rapidement atteinte. Donc, pour les premiers instants, nous pouvons faire l'approximation :

$$\theta_e(p) = \frac{R}{\sqrt{pRC}} \Phi_e(p) \quad (14)$$

La relation entre la température et le flux sur la face d'entrée est d'ordre non entier (p à la puissance $-1/2$: le système est d'ordre $1/2$) [9], et la relation dite aux premiers instants dans le domaine temporel est alors :

$$T_e(t) \approx \sqrt{\frac{4Rt}{\pi C}} \Delta\varphi_e = \Delta\varphi_e \sqrt{\frac{4R}{\pi C}} \sqrt{t} \quad (15)$$

On retrouve ici le comportement pariétal d'un mur semi-infini gouverné par l'effusivité du matériau.

Étudions à présent les réponses obtenues dans les mêmes conditions pour des modèles nodaux avec et sans nœuds de surface. Nous prendrons comme condition initiale que la température est uniformément nulle dans le réseau et nous ne nous intéresserons qu'aux tout

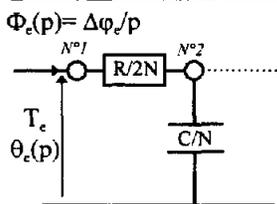
premiers instants d'évolution de la température : comme la chaleur n'a pas le temps de diffuser à l'intérieur du réseau, nous ne considérerons que le premier élément des schémas équivalents (figures 13 et 14).

Si nous considérons un modèle avec nœuds de surface, le flux d'entrée traverse la première résistance, faisant apparaître à ses bornes une différence de température avant que la température aux bornes de la première capacité n'ait commencé à évoluer. Aux premiers instants, un échelon de flux crée un échelon de température (réponse directement proportionnelle à l'excitation d'une résistance $R/2N$, réponse d'ordre 0).

Si nous considérons un modèle sans nœud de surface, le flux d'entrée charge la première capacité, faisant apparaître à ses bornes une rampe de température, avant que le flux ne commence à traverser de manière significative la première résistance. Aux premiers instants, un échelon de flux crée une rampe de température (réponse intégrateur à une excitation d'un condensateur $C/2N$, réponse d'ordre 1).

Le comportement «réel» ne correspond ni au modèle avec nœuds de surface (réponse d'ordre 0), ni au modèle sans nœud de surface (réponse d'ordre 1), mais une à configuration intermédiaire d'ordre 1/2 (cf. équations (14) et (15) et figure 15).

Modèle avec nœuds de surface.



Réponse d'ordre 0

$\theta_e(p)/\Phi_e(p) \approx (R/2N)$
 $\theta_e(p) \approx (R/2N) \Delta\varphi_e$

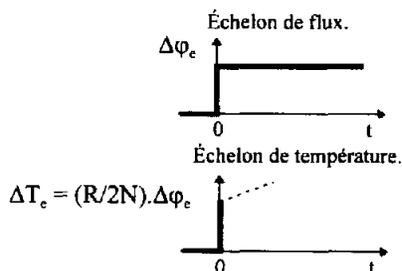
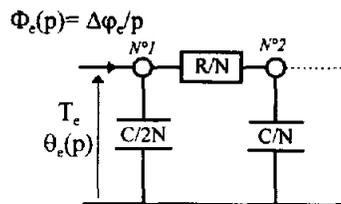


Figure 13. Réponse en température sur la face avant, suite à un échelon de flux (modèles avec nœuds de surface).

Figure 13. Temperature response on the input side to an input heat flux step (model with surface boundary node).

Modèle sans nœud de surface.



Réponse d'ordre 1

$\theta_e(p)/\Phi_e(p) \approx (2N/pC)$
 $\theta_e(p) \approx (2N/p^2C) \Delta\varphi_e$

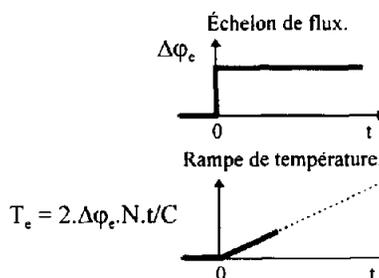
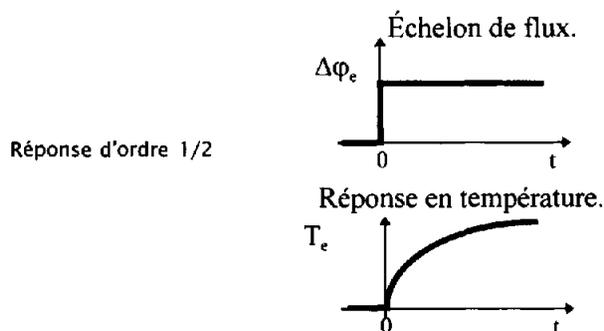


Figure 14. Réponse en température sur la face avant, suite à un échelon de flux (modèles sans nœud de surface).

Figure 14. Temperature response on the input side to an input heat flux step (model without surface boundary node).

Réponse d'ordre 1/2



Solution analytique :

$\theta_e(p) \approx \frac{R}{\sqrt{pRC}} \Phi_e(p) \approx \frac{R}{p\sqrt{pRC}} \Delta\varphi_e$

Équation temporelle :

$T_e(t) \approx \sqrt{\frac{4Rt}{\pi C}} \Delta\varphi_e \approx \Delta\varphi_e \sqrt{\frac{4R}{\pi C}} \sqrt{t}$

Figure 15. Réponse en température sur la face d'entrée suite à un échelon de flux (solution analytique).

Figure 15. Temperature response on the input side to an input heat flux step (analytical solution).



5. ÉVOLUTION DE LA QUALITÉ DES MODÈLES NODAUX ET DES MODÈLES À FONCTIONS DE TRANSFERT LORSQUE L'ON AUGMENTE L'ORDRE

Considérons tout d'abord l'exercice classique de simulation du comportement de modèles nodaux d'ordre restreint (1 à 4). Plus précisément, tout en maintenant la face «arrière» adiabatique, nous appliquons un échelon de température (amplitude de 100 °C) sur la face «avant» du mur pour lequel nous avons adopté les valeurs 1 K·W⁻¹ et 1 J·K⁻¹ pour R et C .

La température initiale est prise comme référence, et l'on observe la température T_s de la face arrière. Nous retrouvons bien, en simulation (figure 16), que plus le nombre de cellules augmente, plus la réponse dynamique se rapproche de la solution de référence (ici un modèle nodal à 128 nœuds, dont la réponse est sensiblement identique aux solutions analytiques classiques [10], mais avec une mise en œuvre plus aisée). De plus, pour un même nombre de cellules (avec et sans nœuds de surface) les courbes obtenues en simulation sont identiques. Notons que le délai présent dans la courbe de référence nécessite ici, pour être restitué, des ordres au moins égaux à 4.

Les erreurs commises par différents modèles nodaux apparaissent sur la figure 17. Visiblement, cette évolution temporelle de l'erreur est difficile à apprécier de manière globale, et nous proposons d'y remédier par l'examen du comportement de ces modèles dans l'espace de Laplace.

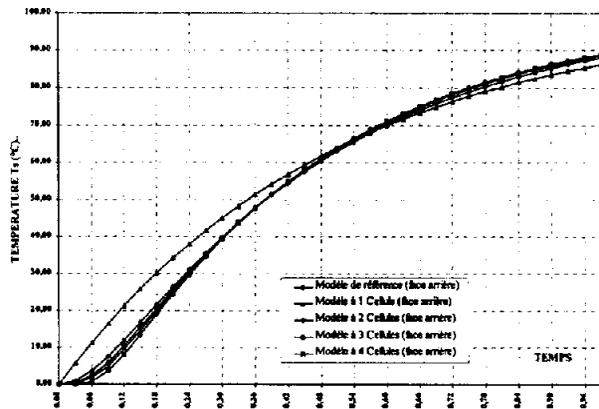


Figure 16. Quatre réponses en température sur la face arrière, lors de l'application d'un échelon de température sur la face avant.

Figure 16. Four back side temperature responses to a temperature step applied on the front side.

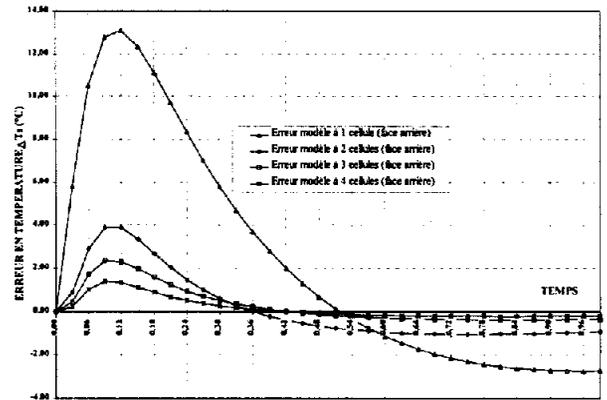


Figure 17. L'erreur de la température sur la face arrière.

Figure 17. Error on the back side temperature.

5.1. Étude des modèles à fonction de transfert

Nous disposons d'une part des fonctions de transfert analytiques développées autour de $p = 0$ (équation (11)), et de l'interprétation physique de ses termes $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ et $D(p)$.

Par ailleurs, nous pouvons aisément calculer la matrice de transfert des différents modèles nodaux d'ordre réduit (cf. annexe), dont les termes apparaissent sous la forme de polynômes.

Nous comparons dans les tableaux I et II les polynômes associés, et nous nous référons également au développement analytique des fonctions $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ et $D(p)$.

En général, le terme $A(p)$ de la matrice correspond à la fonction de transfert en température $\theta_e(p)/\theta_s(p)$, et le terme $D(p)$ de la matrice correspond à la fonction de transfert en flux $\Phi_e(p)/\Phi_s(p)$. Les termes $A(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes en (pRC) de même ordre que le nombre de cellules du modèle. Les valeurs 0 dans les tableaux correspondent à l'absence de termes au-delà de l'ordre des polynômes. Le tableau I présente la comparaison des résultats obtenus jusqu'à l'ordre 4.

On observe l'identité des polynômes correspondant aux modèles avec et sans nœuds de surface.

De plus, la comparaison avec le développement limité de la solution de référence montre que tous les modèles sont ici justes à l'ordre 1. On constate naturellement un rapprochement sensible des fonctions de transfert vers la solution de référence avec l'augmentation du nombre de cellules.

Le terme $B(p)$ de la matrice correspond à la fonction de transfert en impédance $\theta_e(p)/\Phi_s(p)$, et le terme $C(p)$ de la matrice correspond à la fonction de transfert en admittance $\Phi_e(p)/\theta_s(p)$.

TABLEAU I / TABLE I Comparaison des développements limités pour les premiers ordres pour les termes $A(p)$ et $D(p)$ obtenue avec et sans nœuds de surface (N.S). Comparison of limited developments on the first order for the terms $A(p)$ and $D(p)$ obtained with and without surface boudary nodes.									
Coefficients des polynômes $A(p)$ et $D(p)$									
Ordre	Solution analytique exacte	Modèles à 1 cellule		Modèles à 2 cellules		Modèles à 3 cellules		Modèles à 4 cellules	
		avec N.S	sans N.S	avec N.S	sans N.S	avec N.S	sans N.S	avec N.S	sans N.S
$(pRC)^0$	$1 = 1/0!$	1	1	1	1	1	1	1	1
$(pRC)^1$	$1/2 = 1/2!$	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
$(pRC)^2$	$1/24 = 1/4!$	0	0	1/32 -25 %	1/32 -25 %	1/27 -11 %	1/27 -11 %	5/128 -6,2 %	5/128 -6,2 %
$(pRC)^3$	$1/720 = 1/6!$	0	0	0	0	1/1 458 -50 %	1/1 458 -50 %	1/1 024 -29 %	1/1 024 -29 %
$(pRC)^4$	$1/40320 = 1/8!$	0	0	0	0	0	0	1/131 072 -69 %	1/131 072 -69 %

Les pourcentages indiqués correspondent à l'erreur commise sur le coefficient du polynôme du modèle nodal :

$$X\% = \frac{(\text{Coefficient modèle nodal} - \text{Coefficient solution analytique})}{\text{Coefficient solution analytique}} \times 100$$

TABLEAU II / TABLE II Comparaison des développements limités pour les premiers des termes $B(p)$ et $C(p)$, obtenue par modélisation classique, avec et sans nœuds de surface. Comparison of limited developments on the first order for the terms $B(p)$ and $C(p)$ obtained with and without surface boudary nodes.									
Coefficients des polynômes $B(p)$ et $C(p)$									
Ordre	Solution analytique exacte	Modèles à 1 cellule		Modèles à 2 cellules		Modèles à 3 cellules		Modèles à 4 cellules	
		B sans N.S ou C avec N.S	B avec N.S ou C sans N.S	B sans N.S ou C avec N.S	B avec N.S ou C sans N.S	B sans N.S ou C avec N.S	B avec N.S ou C sans N.S	B sans N.S ou C avec N.S	B avec N.S ou C sans N.S
		$(pRC)^0$	$1 = 1/1!$	1	1	1	1	1	1
$(pRC)^1$	$1/6 = 1/3!$	0 ∞	1/4 +50 %	1/8 -25 %	3/16 +12 %	4/27 -11 %	19/108 +5,5 %	5/32 -6,2 %	11/64 +3,1 %
$(pRC)^2$	$1/120 = 1/5!$	0	0	0	1/128 -6,2 %	1/243 -50 %	2/243 -1,2 %	3/512 -29 %	17/2 048 -0,4 %
$(pRC)^3$	$1/5 040 = 1/7!$	0	0	0	0	0	1/8 748 -42 %	1/16 384 -69 %	5/32 768 -23 %
$(pRC)^4$	$1/362 880 = 1/9!$	0	0	0	0	0	0	0	1/1 048 576 -65 %

Nous pouvons noter que, pour un modèle donné, $B(p)$ et $C(p)$ sont des polynômes d'ordres différents.

Plus précisément :

- l'ordre du polynôme $B(p)$ est égal au nombre de cellules en «T» (cas avec nœuds de surface) et inférieur

d'une unité au nombre de cellules en «II» (cas sans nœud de surface) ;

la conclusion est inverse pour le polynôme $C(p)$. Par ailleurs, aux facteurs R et pC , près pour un nombre de cellules donné, les polynômes des modèles nodaux en $B(p)$, avec nœuds de surface, et en $C(p)$, sans nœud de surface, sont identiques, et réciproquement.



On observe, de plus, que ces polynômes ne sont plus exacts qu'à l'ordre 0, et qu'en général la qualité est meilleure pour le terme $B(p)$ avec nœud de surface et pour le terme $C(p)$ sans nœud de surface.

5.2. Étude des modèles nodaux et leur simulation temporelle

Tout en maintenant la face arrière adiabatique ou à température imposée, nous appliquons un échelon soit de température (amplitude de 100 °C), soit de flux (amplitude de 100 W) sur la face avant du mur pour lequel nous avons adopté les valeurs $1 \text{ K}\cdot\text{W}^{-1}$ et $1 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ pour R et C .

5.2.1. Simulation d'un échelon de température sur la face avant et observation de la température sur la face de sortie adiabatique :

$$\theta_s(p)/\theta_e(p) = 1/A(p)$$

Cet exercice a fait l'objet de la simulation initiale en introduction du § 5.

Précisons que, du point de vue topologique, un modèle avec et un modèle sans nœud de surface, correspondant à un même nombre de cellules, possèdent ici le même nombre de capacités (même ordre), du fait de l'imposition de la température en entrée, comme présenté sur la *figure 18*.

5.2.2 Simulation d'un échelon de flux sur la face avant et observation du flux sur la face arrière à température maintenue : $\Phi_s(p)/\Phi_e(p) = 1/D(p)$

La simulation du régime transitoire correspond à un échelon de flux de 100 W appliqué en entrée. L'évolution du flux est observée à l'autre face à température imposée (réseau en court-circuit).

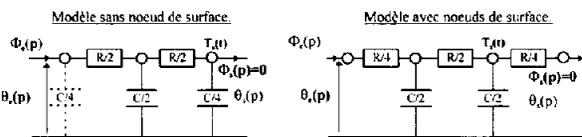


Figure 18. Mur à face arrière isolée, et soumis à un échelon de température sur la face avant : topologie des réseaux avec et sans nœud de surface, et localisation de T_s .

Figure 18. Wall insulated on its back side and with a temperature step condition on its front side: networks topology with and without surface boundary nodes, and localisation of T_{out} .

Nous avons obtenu, par simulations, des réponses et des erreurs en flux analogues aux réponses et aux erreurs en températures présentées sur les *figures 16 et 17*. Ceci correspond bien, d'une part, à l'égalité des termes $D(p)$ dans les cas avec et sans nœuds de surface et, d'autre part, à l'égalité des termes $D(p)$ et $A(p)$.

5.2.3. Simulation d'un échelon de température sur la face avant et observation du flux sur la face arrière à température imposée :

$$\Phi_s(p)/\theta_e(p) = 1/B(p)$$

La simulation concerne le régime transitoire correspondant à un échelon de température en entrée, et l'observation du flux à la sortie, cette sortie restant à température imposée (réseau en court-circuit).

Le terme $B(p)$ s'avère intéressant ici pour suivre l'évolution du flux sur la face de sortie (*figure 19*). Or, nous avons noté un comportement différent (cf. *tableau II*) de ce polynôme, selon qu'il y a ou non un nœud de surface. Rappelons que, pour un nombre de cellules donné, ce sont les modèles avec nœud de surface qui conduisent à la meilleure approximation du polynôme $B(p)$. Nous confirmons cette tendance par l'examen des résultats simulés dans le domaine temporel.

Observons, comme pour le paragraphe précédent, que l'imposition d'une température sur la face d'un modèle nodal est à l'origine de la disparition d'une capacité d'extrémité, comme présenté sur la *figure 20*. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nos comparaisons n'ont ici de sens qu'à partir des modèles à deux cellules.

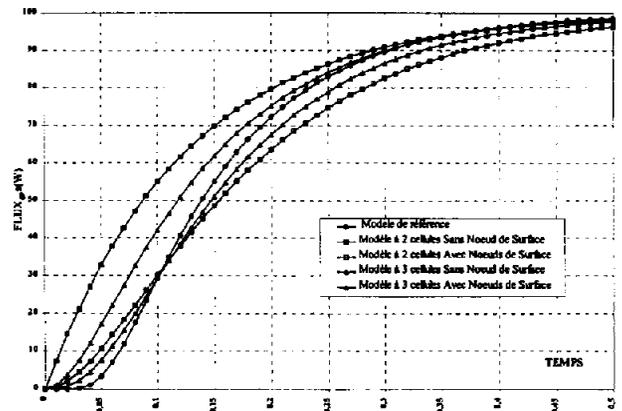


Figure 19. La réponse en flux φ_s lorsqu'un échelon de température est appliqué sur la face avant.

Figure 19. Heat flux φ_s response to a temperature step applied on the front side.

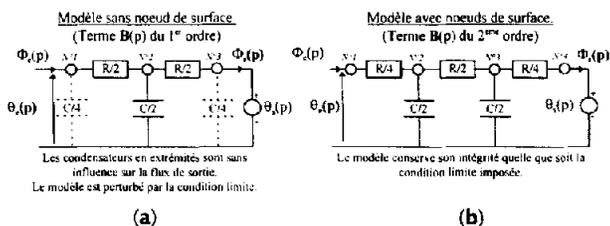


Figure 20. Influence de la condition limite sur le type de modèle (cas avec 2 cellules).

Figure 20. Boundary condition influence upon this type of model (2 cells case).

La réponse dynamique du modèle à 2 cellules avec nœuds de surface (réponse du 2^{ème} ordre) est plus proche du modèle de référence (ici modèle nodal à 128 nœuds) que la réponse dynamique du modèle 2 cellules sans nœud de surface (réponse du 1^{er} ordre). Ce résultat est en accord avec les résultats du *tableau II*, et il est représentatif de cette famille de simulations.

5.2.4. Simulation d'un échelon de flux sur la face avant et observation de la température sur la face arrière adiabatique : $\theta_e(p)/\Phi_e(p) = 1/C(p)$

Les réponses en température de la face de sortie, suite à un échelon de flux sur la face d'entrée, sont données pour différents modèles (*figure 21*). Les résultats correspondent bien aux attentes théoriques prévisibles à partir du modèle à fonction de transfert :

- les modèles sans nœuds de surface présentent une meilleure approximation de $C(p)$ et présentent une meilleure réponse temporelle que les modèles avec nœuds de surface ;
- les mêmes modèles sans nœuds de surface ont un terme $C(p)$ surestimé : les températures, bien que mieux prédites que celle des modèles avec nœuds de surface, sont également sous estimées ;
- à l'inverse, les modèles avec nœuds de surface surestiment la température (la fonction de transfert en impédance $1/C(p)$).

5.2.5 Simulation d'un échelon de flux sur la face avant, la face arrière étant maintenue en température. Observation de la température face avant : $\theta_e(p)/\Phi_e(p) = B(p)/D(p)$

Il s'agit en prolongation de l'étude du paragraphe 4.2.3., relatif aux premiers instants, de comparer les réponses des différents modèles nodaux réduits. À l'égard de θ_e , c'est ici le quotient $B(p)/D(p)$ qui véhicule l'information recherchée. Seuls les polynômes $B(p)$ marquent une différence à l'égard de la présence

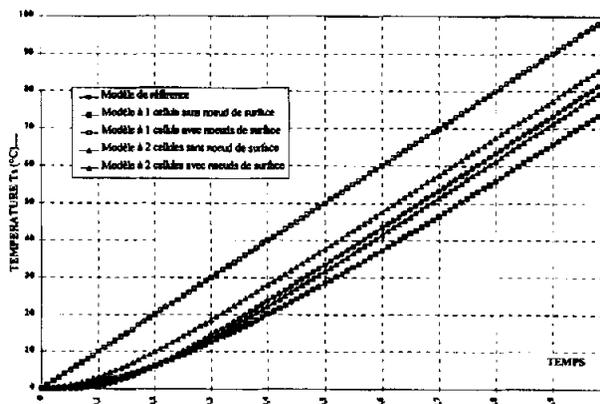


Figure 21. Réponse en température sur la face arrière adiabatique, lorsqu'un échelon de flux est appliqué sur la face avant.

Figure 21. Temperature response on the adiabatic back side to a heat flux step applied on the front side.

de nœuds de surface. Le *tableau II* montre une meilleure qualité prédictive des modèles avec nœuds de surface aux temps longs. Ceci se confirme dans le domaine temporel (cf. *figure 23*).

On observe également l'anomalie engendrée par le nœud de surface face avant, qui conduit à une forte surestimation initiale de T_e . Cette anomalie s'identifie aisément sur un modèle nodal d'ordre N à l'aide de la *figure 22*.

L'équation de bilan nodal en T_e , à $t = 0^+$, s'écrit : $T_e \approx (R/2N)\Delta\varphi_e + T_2$ d'où, en prenant la température initiale (et en particulier T_2) comme nulle : $T_e \approx (R/2N)\Delta\varphi_e$. Cela conduit dans le cas présent aux valeurs initiales de T_e du *tableau III*.

Enfin, le comportement réel (cf. modèle de référence, *figure 23*) de T_e se situe effectivement entre celui décrit par un modèle d'ordre 0 (nœud de surface) et d'ordre 1 (sans nœud de surface), rejoignant ici l'observation formulée au § 4.2.3.

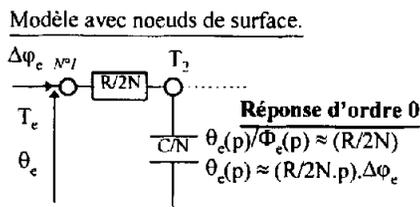


Figure 22. L'extrémité d'un modèle nodal d'ordre N avec nœud de surface.

Figure 22. Extremity of an N order nodal model with a surface boundary node.

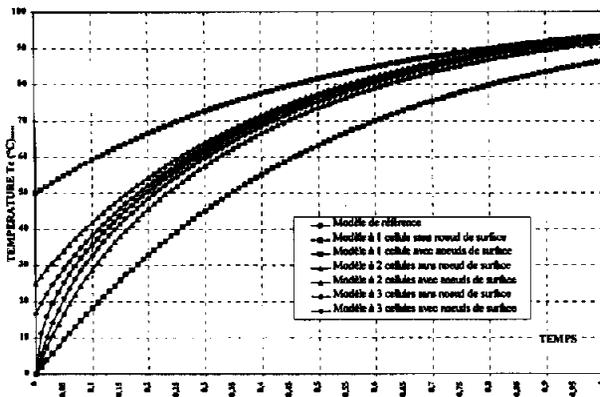


Figure 23. La réponse en température sur la face avant suite à un échelon de flux sur la face avant (face arrière à température imposée).

Figure 23. Temperature response on the front side to a heat flux step applied on the front side (imposed temperature on the back side).

TABLEAU III / TABLE III			
Echelon de température dû au nœud de surface.			
Step of temperature due to boundary node.			
N	1 cellule	2 cellules	3 cellules
T_e	50 °C	25 °C	16,7 °C

6. CONCLUSION

Au-delà de la constatation banale de l'amélioration de la qualité des modèles avec l'augmentation de leur ordre, on peut lire les résultats de cette étude en sens inverse : la recherche de modèles de faible taille, et donc le faible coût en simulation, peut être guidée par l'analyse dans l'espace de Laplace. Visiblement, les termes $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ et $D(p)$ de la matrice de transfert apportent un moyen intéressant pour l'observation des qualités prédictives des modèles. Nous avons vu le rôle particulier que peuvent jouer toutes ces fonctions, en terme de fonction de transfert en température par $A(p)$, ou en flux par $D(p)$, voire de fonctions de transfert en impédance par $C(p)$, ou en admittance par $B(p)$. Les grandeurs usuelles de résistance et de capacité peuvent s'y retrouver, mais dans des conditions très particulières (cf. § 4.2.). D'une

façon générale, les polynômes attachés aux modèles nodaux, et qui approchent ces fonctions de transfert demeurent exacts à l'ordre 0 pour $B(p)$ et $C(p)$ (ce qui assure au demeurant la prédiction correcte des états stationnaires) et à l'ordre 1 pour $A(p)$ et $D(p)$. L'une des voies de poursuite actuelle de ces travaux consiste à améliorer la représentation topologique des réseaux, en vue d'accroître le degré du caractère d'exactitude du polynôme représentant ces fonctions de transfert, et d'accéder ainsi à de nouvelles techniques de réduction de modèles.

Nous avons également analysé le rôle de l'installation de nœuds de surfaces – qui en fait semblent mieux adaptés à d'éventuelles liaisons convectives ou radiatives – et avons montré qu'aux faibles ordres, leur présence ne s'avère pas systématiquement pertinente.

En définitive, cette vision dans l'espace de Laplace s'avère très bénéfique à la compréhension des qualités, mais également des défauts de l'approche nodale aux faibles ordres et laisse présager une voie intéressante en matière de réduction de modèles.

RÉFÉRENCES

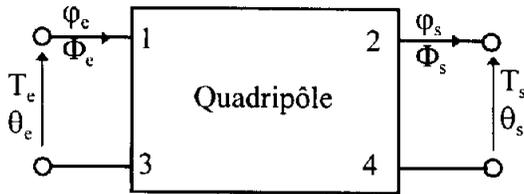
- [1] Saulnier J.-B., La modélisation thermique et ses applications aux transferts couplés et au contrôle actif, Thèse, université de Poitiers, 1980.
- [2] Saulnier J.-B., Alexandre A., La modélisation par la méthode nodale : ses principes et ses limites, Rev. Gén. Therm. (280) (1985) 371–383.
- [3] Fort C., Estimation de paramètres et méthode inverse en thermique. Application à la détermination de la variation du flux pariétal dans une chambre de combustion, thèse, université de Poitiers, 1989.
- [4] Saulnier J.-B., La réduction de modèles en thermique, AI 83 IASTED Symposium Lille, 1983.
- [5] Petit D., Réduction de modèles de connaissance et identification de modèles d'ordre réduit. Application aux processus de diffusion thermique, thèse, université de Provence, 1991.
- [6] Degiovanni A., Conduction dans un mur multicouche avec sources : extension de la notion de quadripôle, Int. J. Heat Mass Tran. 31 (3) (1988) 553–557.
- [7] Antczak E., Defer D., Duthoit B., Impédance thermique appliquée à l'étude d'un matériau poreux humide, Entropie 201 (1996) 35–40.
- [8] Duthoit B., Defer D., Antczak E., Oter L., In-situ characterisation of soil effusivity by measurement of thermal admittance, High Temp. 26 (1994) 225–230.
- [9] Oustaloup A., La dérivation non entière, Hermès, Paris, 1995.
- [10] Martinet J., Éléments de thermocinétique (conduction de la chaleur), TEC & DOC Lavoisier, Paris, 1989.

ANNEXE

Calcul de la matrice de transfert de quadripôles

Définition

On appelle quadripôle un réseau dont les extrémités sont reliées à quatre bornes : deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Nous ne nous intéresserons ici qu'à des réseaux linéaires et passifs. On appelle matrice de transfert la matrice [T] qui relie les grandeurs d'entrées θ_e et Φ_e aux grandeurs de sorties θ_s et Φ_s du quadripôle (figure 24).



Matrice de transfert [T]

$$\begin{vmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{vmatrix}$$

Figure 24. Quadripôle et sa matrice de transfert associée.

Figure 24. A two-port and its associated transfer matrix.

Les méthodes de calcul des quadripôles

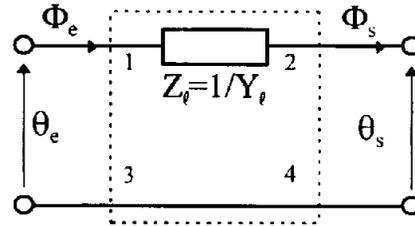
On peut toujours arriver à calculer les éléments de $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$, et $D(p)$ de la matrice de transfert [T] en écrivant l'ensemble des équations à l'aide de la loi des nœuds et de la loi des mailles. Puis après des développements, des substitutions et des simplifications, il est possible d'arriver à l'expression de la matrice de transfert. Une méthode plus élégante consiste à calculer la matrice de transfert comme le produit de matrices de quadripôles élémentaires.

La matrice de transfert du quadripôle à une impédance longitudinale

Prenons l'exemple d'un quadripôle composé d'une impédance Z_l longitudinale, tel que celui présenté sur la figure 25.

La matrice de transfert du quadripôle à une admittance transversale

Prenons l'exemple d'un quadripôle composé d'une admittance Y_t transversale présenté sur la figure 26.



Equations

$$\theta_e = \theta_s + Z_l \Phi_s$$

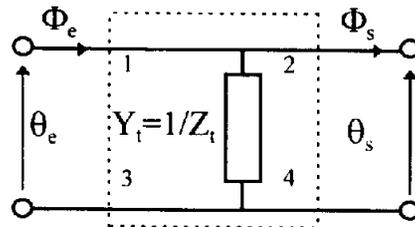
$$\Phi_e = \Phi_s$$

Matrice de transfert [T]

$$\begin{vmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & Z_l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{vmatrix}$$

Figure 25. Quadripôle à une impédance longitudinale Z_l et matrice de transfert associée.

Figure 25. Two-port with one longitudinal impedance Z_l and its associated transfer matrix.



Equations

$$\theta_e = \theta_s$$

$$\Phi_e = Y_t \theta_s + \Phi_s$$

Matrice de transfert [T]

$$\begin{vmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Y_t & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{vmatrix}$$

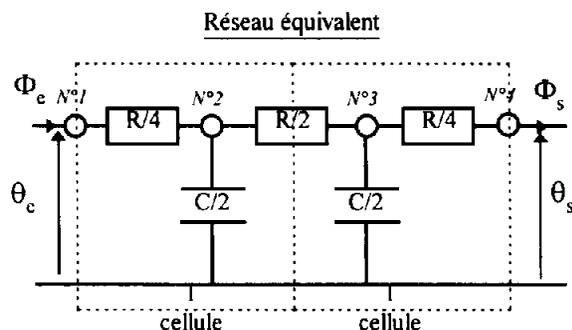
Figure 26. Quadripôle à une admittance transversale Y_t et matrice de transfert associée.

Figure 26. Two-port with one transversal admittance Y_t and its associated transfer matrix.

Application

Nous allons traiter le cas du modèle à deux cellules avec nœuds de surface présenté sur la figure 27. Ce modèle, comportant cinq éléments, se décompose directement en cinq quadripôles élémentaires. Pour calculer la matrice de transfert du modèle global, il suffit de faire le produit matriciel des matrices de transfert élémentaires.

Un logiciel de calcul formel comme MAPLE V.4 permet de faire très facilement ce type de calcul. Les instructions permettant de traiter le réseau équivalent de la figure 27 sont données en exemple ci-dessous (tableau IV).



Matrices de transfert élémentaires

$$[T1] = \begin{vmatrix} 1 & R/4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[T2] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ pC/2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[T3] = \begin{vmatrix} 1 & R/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matrice de transfert globale

$$[T] = [T1] \cdot [T2] \cdot [T3] \cdot [T2] \cdot [T1]$$

Figure 27. Calcul de la matrice de transfert d'un réseau équivalent sous forme d'un quadripôle.

Figure 27. Transfer matrix calculation for a two-port equivalent network.

TABLEAU IV / TABLE IV	
Exemple de calcul de la matrice de transfert d'un réseau équivalent à l'aide du logiciel MAPLE V.4.	
Calculation example of an equivalent network transfer matrix, using MAPLE V.4 [©] software.	
<i>ÉTUDE DU MODÈLE AVEC NŒUDS DE SURFACE, 2 CELLULES, 4 NŒUDS</i>	
<i>Détermination des différentes sous-matrices</i>	
<code>> T1 := matrix(2,2,[1,R/4,0,1]) :</code>	
<code>> T2 := matrix(2,2,[1,0,p*c/2,1]) :</code>	
<code>> T3 := matrix(2,2,[1,R/2,0,1]) :</code>	
<i>Calcul de la matrice de transfert</i>	
<code>> T := multiply(T1,T2,T3,T2,T1) :</code>	
$T := [1 + 1/8 R p c + 1/2 (1/2 (1 + 1/8 R p c) R + 1/4 R) p c,$	$1/4 (1 + 1/8 R p c + 1/2 (1/2 (1 + 1/8 R p c) R + 1/4 R) p c) R$
$1/2 p c + 1/2 (1/4 R p c + 1) p c,$	$+ 1/2 (1 + 1/8 R p c) R + 1/4 R]$
$1/4 (1/2 p c + 1/2 (1/4 R p c + 1) p c) R + 1/4 R p c + 1]$	
<i>Mise en forme des différents termes</i>	
<code>> A := collect(simplify(T[1,1]),p) :</code>	
$A := 1 + 1/2 R p c + 1/32 p^2 c^2 R^2$	
<code>> B := collect(simplify(T[1,2]),p) :</code>	
$B := R + 3/16 R^2 p c + 1/128 p^2 c^2 R^3$	
<code>> C := collect(simplify(T[2,1]),p) :</code>	
$C := p c + 1/8 p^2 c^2 R$	
<code>> D := collect(simplify(T[2,2]),p) :</code>	
$D := 1 + 1/2 R p c + 1/32 p^2 c^2 R^2$	

Abridged English Version

Qualitative analysis of reduced nodal models using the two-port (transfer function) method

This paper aims to establish a particular relation between the nodal method and the two-port method.

Used for a long time in thermal engineering the nodal method has been fully tried and tested in many industrial applications such as space, electronic, power systems, car engines etc. It has certainly limits relative to heat transfer in fluids, however it allows an efficient approach for inverse methods, and it is a good frame for reduction model methods.

The two-port method is also well used in heat transfer: very well suited to the multilayer, it has been extended to porous materials, and to semi-transparent media.

First of all, we recall how to establish from the heat equation, the analytical solution of the transfer matrix characterising the two-port for a finite wall.

We present the modelisation of a finite wall by the nodal method, showing clearly that besides the number of cells connected to the order of the model and to the refinement of the discretisation, there are two ways to modelise a finite wall:

- with 'T' cells leading to an equivalent network with surface boundary nodes ;
- with 'II' cells leading to an equivalent network without surface boundary nodes.

The study of the transfer matrix gives a physical sense to the different matrix terms ($A(p)$, $B(p)$, $C(p)$, $D(p)$) with particular boundary conditions (input: drive with temperature or flux step, output: imposed temperature or adiabatic).

In order to illustrate our demonstration, we will study some asymptotic responses with the use of the transfer matrix, obtained by calculation of limits. We will study the following cases:

- temperature response on the adiabatic back side;
- flux response on the imposed temperature back side;

first instants temperature response to a heat flux step applied on the front side.

The simulations of the output temperature response (finite wall with adiabatic output) to a step temperature input for different models of restricted order (1 to 4) do not lead to significant conclusions, except that the higher the order of the model, the closer it gets to the exact analytical solution.

We suggest that these models be studied in the Laplace space where we have on the one hand analytical

transfer functions, developed around $p=0$ and of the physical interpretation of those terms, and on the other hand, we can calculate from different nodal models the transfer matrix of which the terms appear as polynomials.

At the order 1, diagonal terms $A(p)$ and $D(p)$ are always correct while the non-diagonal terms $B(p)$ and $C(p)$ are correct only at the order 0. For the same order (models with and without surface boundary nodes) the terms $A(p)$ and $D(p)$ are always equal, this is due to the symmetry of the nodal models. On the other hand, the terms $B(p)$ with boundary nodes and $C(p)$ without boundary nodes are equal, and vice versa.

Different simulations in particular cases (input: flux or temperature step, output: imposed temperature or adiabatic) lead to the conclusion that the closer the coefficients of the polynomial in the Laplace space are to the developments of the analytical solution, the better time responses will be.

In the case of a drive in temperature, the response in flux on the output side at imposed temperature will be better for a model with surface boundary nodes (term $B(p)$). On the other hand, for a strike in flux, the response in temperature on the adiabatic output side will be better for a model without boundary node (term $C(p)$).

Beyond the ordinary observation of the quality of the models with the increasing of their order, one can read the results of this study from the opposite side: the research into models of small size, and hence of low simulation cost through the analysis carried out in the Laplace space. One can notice that the terms $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ and $D(p)$ of the transfer matrix offer an interesting means of observation of the models predictive quality. Presently, one meaning to pursue those works consists of improving the topological representation of the networks, in order to increase the degree of accuracy of the polynomial representing those functions of transfer, and to reach new methods of model reduction.

We have also analysed the function of the surface boundary nodes—which seem more suited to possibly convective or radiative connections—and have demonstrated that at the low orders, their presence is not systematically pertinent.

Finally, this approach in the Laplace space is helpful to the understanding of the qualities, but also of the faults of the nodal approach at low orders and allows a good mean in terms of models reduction to be predicted.